

# Interpolation et méthodes à haute résolution pour antennes non uniformes

Fouzi. HARROU\*, José. PICHERAL\*\*

\**Laboratoire de Modélisation et Sûreté des Systèmes (LM2S)*  
*ICD/UTT, FRE CNRS 2848, 12 rue Marie Curie- B.P. 2060 - 10010, Troyes, France*

Fouzi.harrou@utt.fr

\*\* *SSE/SUPELEC, Plateau de Moulon ,3 rue Joliot-Curie, 91192 Gif sur Yvette cedex, France*

**Résumé:** Le travail présenté dans ce papier se rapporte à l'application et le développement de méthodes de localisation de sources pour les antennes non uniformes. Il s'agit en particulier de l'adaptation des méthodes à haute résolution pour les Antennes Linéaires Non Uniformes (ALNU) afin de réaliser l'estimation de direction d'arrivée. Pour se faire une méthode d'interpolation spatiale est mise en œuvre. L'objet de ce papier est de comparer les performances de ces différentes méthodes et d'évaluer la sensibilité des méthodes au choix des paramètres de l'interpolateur.

**Mots clés:** Traitement d'antenne, interpolation, estimation, antennes non uniformes, méthodes à haute résolution.

## INTRODUCTION

Les réseaux linéaires non uniformes (ALNU) ont d'autres caractéristiques différentes de celles des réseaux linéaires uniformes, de ce fait, les algorithmes d'estimation de direction d'arrivée comme Root-MUSIC et ESPRIT ne peuvent pas être généralisés pour ce genre de réseaux. Pour se faire, la méthode d'interpolation mise en œuvre, permet d'adapter les méthodes à haute résolution aux antennes non uniformes (lacunaires, quelconques, à minimum de redondance). De telle sorte que la méthode d'interpolation fournisse les sorties d'un réseau virtuel uniforme, calculées à partir du réseau réel à l'aide d'une procédure d'interpolation linéaire sur un secteur donné. Le réseau virtuel est une antenne linéaire uniforme (ALU), donc les méthodes à haute résolution classiques peuvent y être appliquées.

Concernent la méthode d'interpolation linéaire utilisée ici, elle a été proposée par [Bronez 1988], plus tard cette approche a été approfondie par [Friedlander 1993]. Différentes méthodes à haute résolution ont été utilisées avec l'interpolation proposée par Friedlander : Root-MUSIC [Friedlander 1993], ESPRIT [Weiss et Gavish 1991], [Gavish et Weiss 1993], puis MUSIC [6] et en fin MODE (or Root-WSF) [Weiss et Friedlander 1993]. L'interpolation proposée par Friedlander a aussi été utilisée pour une application aux signaux sismique dans [Sidorovich et Gershman 1998].

Parmi les méthodes à haute résolution proposée pour les ALNU on trouve spectral MUSIC, les méthodes basées sur les moments d'ordres supérieurs

(MOS-ESPRIT). Une autre approche consiste à interpoler le signal sur un réseau virtuel uniforme pour mettre en œuvre les méthodes à haute résolution classiques comme Root-MUSIC et ESPRIT. L'intérêt applicatif de ces méthodes est double : premièrement, la conception de réseaux d'antennes non uniformes à minimum de redondance permet de réduire le nombre d'éléments du réseau tout en maintenant des performances équivalentes en terme de résolution; deuxièmement, la défaillance de certains capteurs peut être prise en compte de manière plus satisfaisante qu'avec les méthodes usuelles (notamment en géophysique).

L'objet de ce papier est de comparer les performances de ces différentes méthodes et d'évaluer la sensibilité des méthodes au choix des paramètres de l'interpolateur. En particulier on souhaite étudier l'influence de plusieurs paramètres dans la conception de la méthode d'interpolation qui est une méthode très flexible (nombre de capteur dans le réseau virtuel, l'espacement inter-capteurs, nombre de secteurs, pas de discrétisation).

On considère un réseau linéaire comportent  $M$  capteurs disposés d'une manière non uniforme, recevant  $N$  signaux à bande étroite avec des angles d'arrivée  $\theta_1, \dots, \theta_N$  (voir figure 1). On note  $d_m$  la position du  $m$ -ième capteur, soit  $\mathbf{x}(t)$  le vecteur contenant les  $M$  signaux mesurés à la sorties des capteurs, le modèle du signal mesuré s'écrit classiquement sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

où  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_N)]$  est la matrice  $N \times M$  des vecteurs sources

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [e^{j2\pi\frac{d_1}{\lambda}\sin\theta_i}, e^{j2\pi\frac{d_2}{\lambda}\sin\theta_i}, \dots, e^{j2\pi\frac{d_M}{\lambda}\sin\theta_i}]$$
 avec  $\lambda$  la longueur d'onde ;  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_N(t)]^T$  est un vecteur de  $N$  composantes contenant les amplitudes complexes des sources et  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), \dots, n_M(t)]^T$  est le bruit. Les composantes du bruit sont supposées indépendantes, de variance égale à  $\sigma_n^2$  et les sources à détecter  $\mathbf{s}(t)$  sont supposées indépendantes entre elles et du bruit  $\mathbf{n}(t)$  et les capteurs sont supposés omnidirectionnels et de gain unitaire.

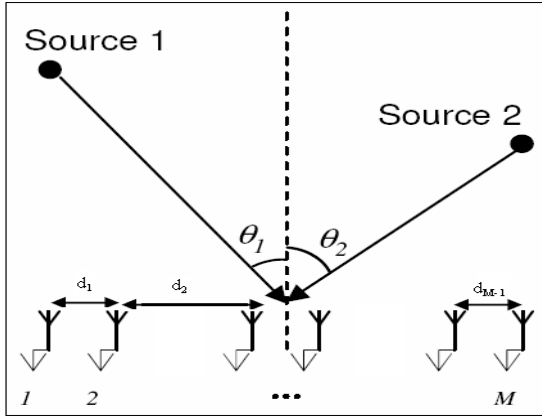


Figure 1. Principe de l'estimation de direction d'arrivée

## 1. Méthode d'interpolation

Pour l'estimation des directions d'arrivée on ne peut pas appliquer l'algorithme Root-MUSIC [Friedlander 1993] ou bien ESPRIT [Roy et al 1986] directement à la matrice de covariance du réseau réel non uniforme, pour surmonter ce problème on interpole le réseau non uniforme à une Antenne Virtuelle Linéaire Uniforme (AVLU) par le biais de la méthode d'interpolation.

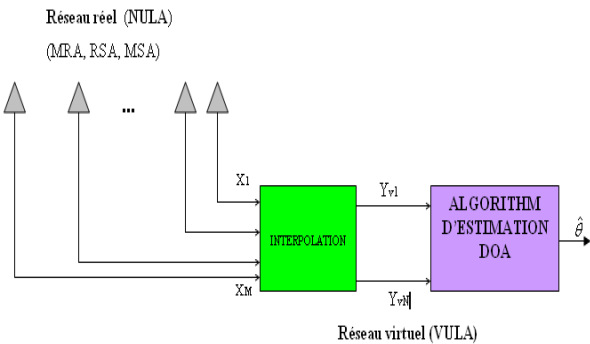


Figure 2. Interpolation d'ALNU à AVLU pour l'estimation de direction d'arrivée.

Pour la méthode d'interpolation, la première étape consiste à diviser l'espace d'observation du réseau en  $L$  secteurs. Le  $i$ -ème secteur est définie par:  $\Theta_i = [\theta_{iMin}, \theta_{iMax}]$  avec  $i = 1, 2, \dots, L$

Par exemple si l'espace d'observation du réseau est de  $180^\circ$  ( $[-90^\circ, 90^\circ]$ ), donc on divise l'espace d'observation en  $L=4$  secteurs de  $45^\circ$ , comme il est illustré sur la figure suivante:

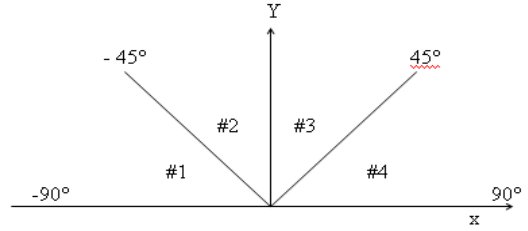


Figure 3. L'espace d'observation divisé en 4 secteurs

La deuxième étape est consacrée à la discrétisation des secteurs : nous définissons un ensemble d'angles uniformément répartis pour couvrir chaque secteur.  $\Theta_i = [\theta_{iMin}, \theta_{iMin} + \delta, \theta_{iMin} + 2\delta, \dots, \theta_{iMax}]$ , où  $\delta$  est le pas de discrétisation.

La troisième étape consiste à calculer la matrice direction  $A_i$  de réseau réel non uniforme (ALNU) pour chaque secteur, tel que  $A_i$  présente la réponse du réseau réel aux angles d'arrivés  $\Theta_i$ .

$$A_i = [a(\theta_{iMin}), a(\theta_{iMin} + \delta), \dots, a(\theta_{iMax})] \quad (2)$$

On fixe ensuite le nombre de capteurs virtuels  $N_v$ , et on calcule la matrice direction  $\bar{A}_i$  du réseau virtuel (AVLU), pour le secteur  $\Theta_i$ , avec  $\bar{A}_i$  la réponse de réseau virtuel aux angles d'arrivés  $\Theta_i$

$$\bar{A}_i = [\bar{a}(\theta_{iMin}), \bar{a}(\theta_{iMin} + \delta), \dots, \bar{a}(\theta_{iMax})] \quad (3)$$

La quatrième étape consiste à calculer la matrice d'interpolation et cela pour chaque secteur telle que

$$B_i A(\Theta_i) = \bar{A}(\Theta_i), \text{ pour } i = 1, 2, \dots, L \quad (4)$$

La matrice direction du réseau virtuel est obtenue par une interpolation linéaire de la matrice direction du réseau réel. La matrice d'interpolation  $B_i$  est la solution aux moindres carrés minimisant le critère :

$$\min_{\{B_i\}} \|\bar{A}_i(\Theta_i) - B_i A_i(\Theta_i)\| \quad (5)$$

La matrice d'interpolation  $B_i$  calculée par la méthode de moindres carrés est donnée par la formule suivante.

$$B_i = \bar{A}_i(\Theta_i) A_i(\Theta_i)^H \left[ A_i(\Theta_i) A_i(\Theta_i)^H \right]^{-1} \quad (6)$$

Après avoir calculé la matrice d'interpolation  $B_i$  on peut calculer la matrice de covariance du réseau virtuel. Pour le  $i$ -ème secteur, le signal à la sortie du réseau virtuel peut être approximé à l'aide de l'interpolation linéaire.

$$y_i(t) = B_i x(t) \quad (7)$$

Donc en remplaçant  $\mathbf{x}(t)$  par son expression on retrouve  $\mathbf{y}(t)$ , où  $\mathbf{y}(t)$  représente la réponse du réseau virtuel dans le  $i$ -ème secteur :

$$y_i(t) = B_i [A s(t) + n(t)] \quad (8)$$

La matrice de covariance du réseau réel non uniforme est donnée par l'équation suivante

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = \mathbf{R}_Y + \mathbf{R}_n = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \quad (9)$$

Après interpolation on calcule la matrice de covariance du réseau virtuel, avec la méthode d'interpolation linéaire. Le calcul de la matrice de covariance  $\bar{\mathbf{R}}_i = E[\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^H]$  du réseau virtuel linéaire et uniforme, d'après (7) et (8) on obtient

$$\bar{\mathbf{R}}_i = \mathbf{B}_i\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H\mathbf{B}_i^H + \mathbf{B}_i\sigma_n^2\mathbf{I}\mathbf{B}_i^H \quad (10)$$

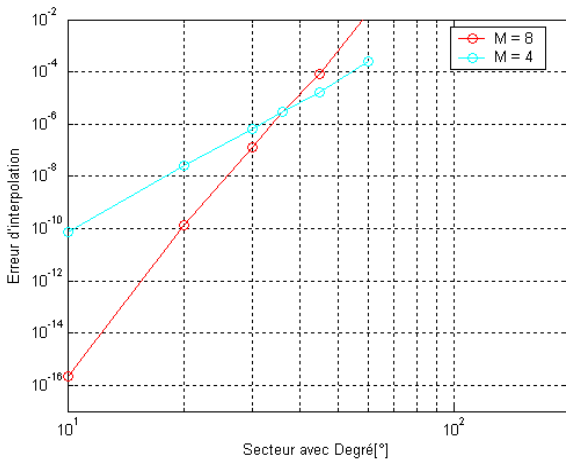
Puisque  $\mathbf{B}_i\mathbf{A}(\Theta_i) = \bar{\mathbf{A}}(\Theta_i)$ , il suffit pour l'estimation de direction d'arriver d'appliquer une méthode à haute résolution (MUSIC, ESPRIT, Root-MUSIC) à la matrice de covariance des observations blanchies, et cela pour chaque secteur. Finalement on rassemble les estimations de DOA de tous les secteurs. Pour étudier la précision de l'interpolation on définit une mesure de l'erreur d'interpolation globale et locale, outils permettant de vérifier l'approximation d'interpolation linéaire. L'erreur globale d'interpolation  $Q$  représente l'erreur d'interpolation sur un secteur et est donnée par la formule suivante :

$$Q = \|\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{A}\|^2 / \|\bar{\mathbf{A}}\|^2 \quad (11)$$

L'erreur locale correspond à l'erreur d'interpolation pour un angle donné et est définie par :

$$\varepsilon(\theta) = \|\bar{\mathbf{a}}(\theta) - \mathbf{B}\mathbf{a}(\theta)\|^2 / \|\bar{\mathbf{a}}(\theta)\|^2 \quad (12)$$

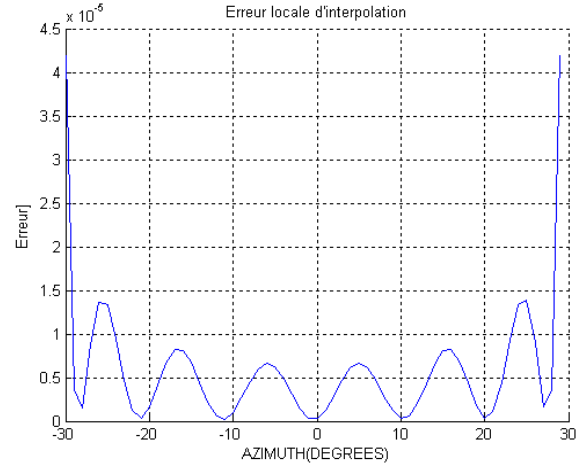
## 2. Simulations numériques



**Figure 3.** erreur globale d'interpolation pour ALNU avec  $M=4,8$  capteurs.

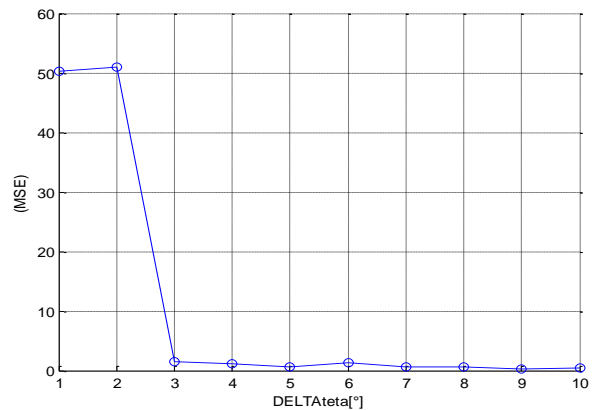
La figure 3. illustre une forte dépendance entre l'erreur globale d'interpolation et la taille du secteur, on remarque bien que l'erreur globale d'interpolation croit lorsque la taille de secteur augmente. Nous pouvons utiliser ce graphe pour choisir la taille du secteur correspondant à l'erreur désirée et inversement. Par exemple, pour un secteur de taille 30° on trouve  $Q < 10^{-6}$  pour le réseau réel non uniforme de 4 capteurs et  $Q < 10^{-7}$  pour le ALNU de 8 capteurs.

On considère un réseau linéaire comporte 7 capteurs disposés d'une manière non uniforme, le réseau virtuel est un réseau linéaire uniforme, comporte 6 capteurs, l'interpolation est réalisée sur trois secteurs de taille 60°, l'espacement intercapteurs est  $\lambda/4$ . On obtient la courbe d'erreur locale représenté sur la figure 4. On remarque que l'erreur d'interpolation locale devient importante autour des extrémités du secteur. Pour éviter cela Friedlander propose d'utiliser des secteurs avec recouvrement.



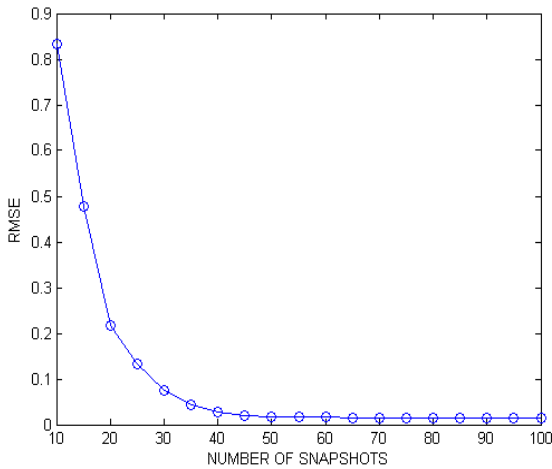
**Figure 4.** erreur locale d'interpolation

La figure 5 illustre l'évolution de l'erreur quadratique moyenne (MSE) sur les angles d'arrivée en fonction de l'écartement des sources  $\Delta\theta$  lorsque  $\text{SNR}=15\text{dB}$ ,  $\text{NOB} = 100$  observations,  $L=3$  secteurs, le pas = 1° et  $\theta_1 = 20^\circ$ , et  $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$ , ALNU avec 7 éléments et AVLNU avec 6 éléments espacés d'un pas de  $0.25\lambda$ . On peut voir sur la figure II.3 que la méthode Root-Music interpolée présente une grande capacité à séparer deux sources proches l'une de l'autre.



**Figure 5.** Séparation angulaire.

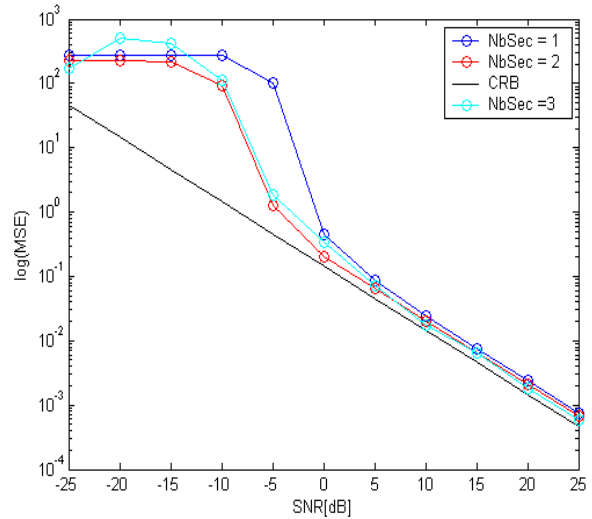
La figure 6 illustre les performances de la méthode Root-MUSIC interpolée en fonction du nombre d'observations (snapshots). On observe que les performances s'améliorent au fur et à mesure que le nombre d'échantillons signal augmente.



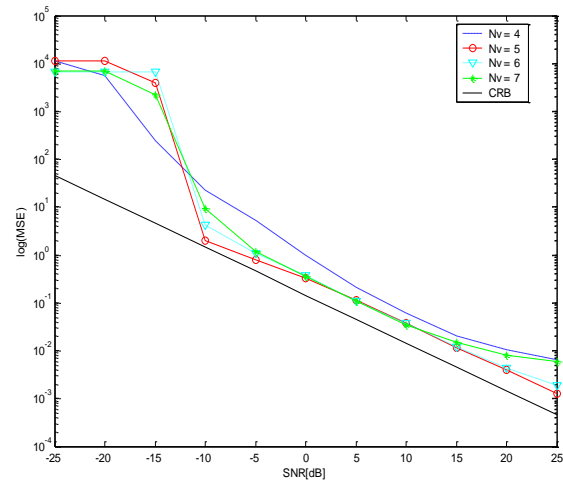
**Figure 6.** Influence du nombre d'observation sur l'estimation des DDA.

On considère maintenant une ALNU de 7 éléments et une AVLU de 5 éléments après interpolation avec un pas de discrétisation de  $1^\circ$ , l'angle d'arrivée est  $\theta = 30^\circ$  et le nombre d'observation 1000. L'erreur quadratique moyenne (MSE) de l'estimation de l'angle d'arrivée est représentée sur la figure 7 lorsque le nombre de secteurs utilisés pour l'interpolation varie. L'intérêt de ce type de simulation est d'évaluer l'influence du choix des paramètres d'interpolation sur les performances des méthodes à haute résolution pour l'estimation de direction d'arrivée. Comme attendu, augmenter le nombre de secteurs permet d'améliorer l'estimation d'angle d'arrivée dans la zone pré-asymptotique, on notera cependant qu'au delà de 2 secteurs les performances sont faiblement liées au du nombre de secteurs. Nous pouvons par ailleurs observer les bonnes performances de la méthode Root-Music interpolée, notamment en terme d'efficacité puisque les performances se rapprochent de la borne de Cramer-Rao.

La figure 8 illustre la dépendance des performances de la localisation au nombre de capteurs virtuels utilisés dans l'AVLU. On constate que le choix du nombre de capteurs virtuels modifie les performances de façon non négligeable, le choix optimum dans ce cas étant de 5 capteurs. En fait, il s'avère que les performances dépendent fortement du choix des paramètres d'interpolation, c'est ce que l'on peut voir en comparant les deux figures précédentes obtenues.



**Figure 7.** Influence du nombre de secteurs sur l'estimation des DDA.



**Figure 8.** Influence du nombre de capteurs virtuels sur l'estimation.

### 3. Conclusion

Dans cet article, nous avons explicité la méthode d'interpolation, son principe, ces applications. Nous avons envisagé l'utilisation de cette méthode à l'adaptation des méthodes à haute résolution aux antennes non uniformes.

Dans cet article, on a pu montrer dans quelques exemples, que le choix des paramètres d'interpolation est un facteur essentiel pour améliorer les performances d'estimation. Plusieurs perspectives à ce travail sont envisagées, notamment, on pourrait réfléchir à un moyen d'optimiser les paramètres utiliser pour l'interpolation (nombre de secteurs, nombre de capteurs virtuels, pas de discrétisation), de tel sorte on cherche ainsi les paramètres qui minimisent l'erreur d'interpolation dans un premier temps et l'erreur d'estimation de DOA, par ailleurs, on pourrait envisager d'autres géométrie de réseau.

## REFERENCES

- [Abramovich 1998] Yuri Abramovich and Nicholas Spencer, *Optimisation Methods in. Nonuniform Linear Antenna Array Design and Signal Processing*, Cooperative Research Centre for Sensor Signal and Information Processing (CSSIP), 1 Jul 1998
- [Bronez 1988] T.P. Bronez, *Sector interpolation of nonuniform arrays for efficient high resolution bearing estimation*. in Proc .IEEE ,ICASSP'88, vol. 5, pp. 2885-2888, New York, NY, Apr.1988.
- [Friedlander 1993] B. Friedlander, *The root-music algorithm for direction finding with interpolated arrays*. European J. (Elsevier) Signal Processing, Vol. 30, pp.15-29, 1993.
- [Gavish et Weiss 1993] M.Gavish, A. J. Weiss, *performance analysis of the VIAESPRIT algorithm*. IEEE Proc. – Radar and Signal Processing, vol. 140, pt. F, pp. 123-128, Apr. 1993.
- [Roy et al 1986] R. Roy, A. Paulraj, et T. Kailath. *ESPRIT– A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise*. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, 34(5) :1340–1342, octobre 1986.
- [Sidorovich et Gershman 1998] D. V. Sidorovich and A. B. Gershman, *Twodimensional wideband interpolated Root-Music applied to measured seismic data*. IEEE Trans. Signal processing, vol.46, pp.2263-2267, Aug. 1998
- [Weiss et Gavish 1991] A. J. Weiss and M. Gavish, *Direction finding using ESPRIT with interpolated arrays*. IEEE Trans. Signal processing, vol. 39,pp. 1473-1478, jun.1991.
- [Weiss et Friedlander 1993 ] A. J.Weiss and B.Friedlander, *Performance analysis of spatial smoothing with interpolated array*. IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, pp.1881-1892, May. 1993.
- [Weiss et al 1993] A. J.Weiss and B.Friedlander, and P. Stoica, *Direction finding with interpolated MODE*. in Proc, IEEE 27th Asilomar Conf. Signals, Syst., Comput., vol. 2, pp. 1376-1380, Pacific Grove, CA, Nov. 1993.