

Modèles et schémas mixtes pour le contact en dynamique

H. Ben Dhia^a, C. Zammali^a, F. Voldoire^b, S. Lamarche^b

^a LMSS-Mat, École Centrale Paris

Grande voie des vignes 92290 Châtenay-Malabry

bendhia@mssmat.ecp.fr , zammali@mssmat.ecp.fr

^b EDF/DRD/AMA

1, Avenue du Général de Gaulle 92140 Clamart

francois.voldoire@edf.fr , sophie.lamarche@edf.fr

Résumé

On propose des formulations continues et hybrides pour les problèmes de contact en dynamique. Dans la première formulation, on utilise une modélisation du contact mixant une méthode hybride [3] de type lagrangien augmenté [1] et une méthode de pénalisation. La deuxième s'obtient à partir d'une écriture en vitesse des lois de contact et l'usage de champs de signes en placement et vitesse. La troisième repose sur une écriture mixte vitesse-déplacement. Concernant la discrétisation temporelle, on propose d'utiliser une méthode mixte implicite-explicite.

1 Introduction

La motivation industrielle liée à ce travail est le calcul d'assemblages combustibles d'une cuve de réacteur nucléaire. Pour ce système, les sollicitations extérieures, dues, soit au fluide caloporteur, soit (accidentellement) à un séisme, induisent des chocs au sein des liaisons entre les crayons combustibles et les grilles de maintien. Ces chocs (localisés en espace et en temps) constituent une source d'endommagement pour les assemblages. La très haute exigence de sûreté des installations nucléaires rend impérative la connaissance précise de certains champs mécaniques, particulièrement les forces de choc.

Ce problème rentre dans le cadre de la dynamique non linéaire et irrégulière des systèmes mécaniques. Nous nous intéressons ici, tout particulièrement, aux aspects liés aux contacts.

2 Formulation globale du problème de contact-impact

On s'intéresse au problème de contact, sans frottement, en dynamique et en grandes transformations entre deux solides élastiques S_1 et S_2 (cf. Figure 1 pour les notations).

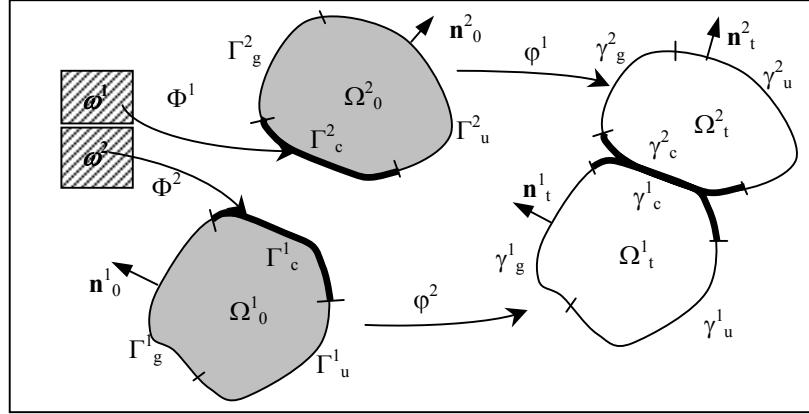


Figure 1– Description du problème mécanique

2.1 Principe des travaux virtuels en dynamique

Dans le cas où les déplacements imposés sur Γ_u^i et les forces surfaciques appliquées sur Γ_g^i ($i=1,2$) sont nuls et dans le cas où on néglige les forces volumiques, le principe de travaux virtuels s'écrit, pour tout couple de champs admissibles $\mathbf{w} = (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2)$ et pour tout temps t , au delà d'un temps initiale t_0 , comme suit :

$$-\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^i} \rho_0^i \ddot{\mathbf{u}}^i \cdot \mathbf{w}^i d\Omega_0^i = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^i} \text{Tr}[\mathbf{\Pi}^i(\mathbf{u}^i)(\nabla_p(\mathbf{w}^i))^T] d\Omega_0^i - \int_{\Gamma_c} \mathbf{R} \cdot [[\mathbf{w}]] d\Gamma_p \quad (1)$$

où :

- $\Gamma_c = \Gamma_c^1$ est la partie de la frontière du domaine Ω_0^1 qui est susceptible de rentrer en contact,
- ρ_0^i est la masse volumique du solide S_i dans sa configuration initiale,
- $\mathbf{\Pi}^i$ est le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff,
- \mathbf{p}^i est le champ-vecteur position dans la configurations initiale,
- $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1(\mathbf{p}, t) = -\mathbf{R}^2(\bar{\mathbf{p}}, t)$ est l'action nominale de contact de S_2 sur S_1 . $\bar{\mathbf{p}}$ est le point de Γ_c^2 apparié à \mathbf{p} (point de Γ_c) à l'instant t . Dans la suite, on écrit $\mathbf{R}(\mathbf{p}, t) = \lambda(\mathbf{p}, t)\mathbf{n}$ où \mathbf{n} est la normale unitaire à γ_c^2 , intérieure à Ω_t^2 ($\mathbf{n} = -\mathbf{n}_t^2$).
- $[[\mathbf{w}]](\mathbf{p}) = \mathbf{w}^1(\mathbf{p}) - \mathbf{w}^2(\bar{\mathbf{p}})$ sur Γ_c

Pour compléter le système (1), nous avons besoin d'un modèle de comportement pour le

matériau constituant. Cet aspect n'est pas abordé ici. Nous avons également besoin d'un modèle d'interaction entre les deux solides.

2.2 Lois de contact

Les lois de contact de Signorini ($d_n \leq 0$, $\lambda \leq 0$ et $\lambda d_n = 0$) admettent les écritures équivalentes suivantes [3]:

$$\lambda = S_g g_n, \text{ sur } \Gamma_c \quad (2)$$

$$S_g = \chi(g_n), \text{ sur } \Gamma_c \quad (3)$$

où χ est la fonction caractéristique de \mathbb{R}^- , $g_n = \lambda - \rho_n d_n$ est le multiplicateur de contact stabilisé par un terme de pénalisation dans la zone effective de contact, ρ_n est un coefficient strictement positif, d_n est la distance orientée entre deux point appariés et où S_g est le "champ de signe" en placement, introduit dans [4] et s'apparentant à un champ de type "level set" inconnu.

La combinaison du principe des travaux virtuels (1) et des lois de contact (2), (3) donne la formulation suivante :

Trouver $(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \lambda, S_g) \in (\mathbf{CA})^1 \times (\mathbf{CA})^2 \times H \times L^\infty(\Gamma_c; \{0,1\})$, tels que, pour tout $(\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \lambda^*)$ dans $(\mathbf{CA})^1 \times (\mathbf{CA})^2 \times H$:

$$-\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^i} \rho_0^i \ddot{\mathbf{u}}^i \cdot \mathbf{w}^i d\Omega_0^i = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^i} \text{Tr}[\mathbf{\Pi}^i(\mathbf{u}^i)(\nabla_p \mathbf{w}^i)^T] d\Omega_0^i - \int_{\Gamma_c} S_g g_n [[w_n]] d\Gamma \quad (4.a)$$

$$\frac{1}{\rho_n} \int_{\Gamma_c} (\lambda - S_g g_n) \lambda^* d\Gamma = 0 \quad (4.b)$$

$$S_g = \chi(g_n), \text{ sur } \Gamma_c \quad (4.c)$$

(avec une relation de comportement et des conditions initiales satisfaites)

Notons que $(\mathbf{CA})^i$ ($i=1, 2$) et H sont les espaces admissibles du champs de déplacement \mathbf{u}^i et du multiplicateur de contact λ , respectivement.

3 Discrétisations classiques en temps

Pour l'intégration temporelle du système (4), nous montrons d'abord les carences du schéma de Newmark :

$$u_{k+1} = u_k + \Delta t \dot{u}_k + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\alpha)\ddot{u}_k + 2\alpha\ddot{u}_{k+1}] \text{ et } \dot{u}_{k+1} = \dot{u}_k + \Delta t [(1-\beta)\ddot{u}_k + \beta\ddot{u}_{k+1}] \quad (5)$$

où $k+1$ renvoie à l'instant de calcul, α et β sont deux paramètres vérifiant, pour la dynamique linéaire, une condition de stabilité.

Les résultats numériques donnés par ce schéma pour le problème académique d'impact entre deux barres élastiques sont connus (cf. e.g. [6]). Nous les rappelons ici pour les commenter et ainsi motiver nos propositions de formulations et de schémas. Sur la Figure 3, nous donnons les résultats obtenus pour plusieurs valeurs des paramètres numériques α et β . Dans un premier cas, on considère la méthode des trapèzes ($\alpha=0.25$ et $\beta=0.5$). Un deuxième choix consiste à prendre $\alpha=0.5$ et $\beta=0.5$, paramètres conseillés par Chaudhary et Bathe [5] pour l'impact entre deux masses ponctuelles. Dans le troisième cas, on introduit de l'amortissement numérique ($\alpha=0.49$ et $\beta=0.9$). Le pas de temps est égale à 10^{-5} s.

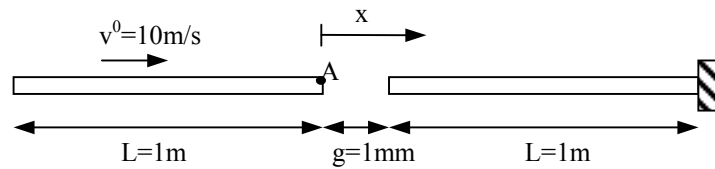


Figure 2 – Impact entre deux barres élastiques

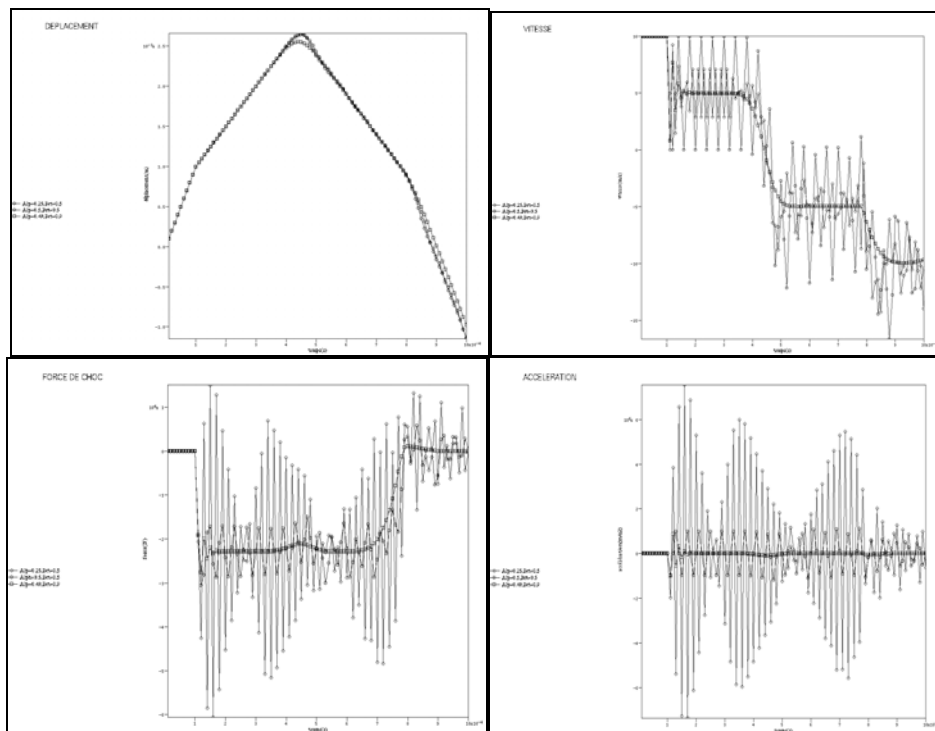


Figure 3 – Déplacement, vitesse, force de contact et accélération au point A en fonction du temps

En comparant ces résultats aux solutions analytiques de l'impact entre deux barres élastiques, on constate l'apparition, au moment du choc, d'oscillations des vitesses, des forces de contact et des accélérations. On rappelle que la méthode des trapèzes n'induit pas d'amortissement numérique. Il n'y a pas atténuation des oscillations. Dans le deuxième cas, l'atténuation des oscillations est faible. Les oscillations s'atténuent dans le troisième cas, et ce, parce que l'on introduit de l'amortissement numérique. Mais, on modifie les modes à basses fréquences (visible sur la courbe des déplacements).

Ces oscillations sont dues (en partie) à l'utilisation d'un schéma d'ordre élevé non justifiable en présence d'irrégularités : dans les problèmes d'impact les champs de déplacements, et à fortiori ceux des vitesses, sont non dérivables (au sens classique) aux instants de chocs. L'usage d'un schéma de type Newmark fait, entre autres, que la condition de contact persistant ($\lambda[[v_n]] = 0$) n'est plus satisfaite. Cette condition est nécessaire pourtant pour avoir la conservation de l'énergie totale du système (cf. e.g. [8]).

4 Formulations par mixage des stratégies

Pour remédier aux carences des schémas d'ordre élevés dans les zones de chocs, tout en gardant leurs avantages ailleurs, nous proposons une formulation amortie et une formulation mixée dont nous élaborons les composants.

4.1 Modèle de contact amortissant

Dans cette section, on propose un modèle de contact qui tient compte des chocs. Ce modèle consiste à rajouter une densité de percussion amortissante : l'effort normal de contact (R_n) de (1) est décomposé en une partie "statique" (λ) et une autre "dynamique". Le terme statique est traité par un modèle de Signorini, celui dynamique par une pénalisation du saut des vitesses normales ($[[v_n]]$) sur les zones effectives de contact. Soit :

$$R_n = \lambda - S_g C_n [[v_n]], \text{ sur } \Gamma_c \quad (6)$$

où S_g est défini par (3).

Le terme d'amortissement de l'effort de contact est introduit pour dissiper l'énergie de choc. Il permet, tout particulièrement, de satisfaire, d'une manière approchée, la condition de contact persistant.

Remarquons que C_n est un coefficient positif à identifier par l'expérience. Notons aussi que, même avec l'ajout de l'amortissement mécanique, la dimension du problème reste inchangée. C'est un avantage de cette approche. Mais, on ne pourra pas distinguer l'amortissement mécanique de celui numérique. En effet, dans le cas où C_n n'est pas bien identifié, son effet devient similaire à celui de l'amortissement numérique : on reproduit bien le comportement dynamique des structures au premier choc et on le modifie pendant les autres chocs.

4.2 Formulation en vitesse

Partant du constat que les oscillations apparaissent sur les champs de vitesses après une première dérivation des champs non réguliers, il nous semble intéressant d'écrire une formulation continue en vitesse où l'on contrôle les vitesses et les placements, à la fois. Une fois les vitesses déterminées, on calcule les déplacements par intégration. L'écriture en vitesse du modèle de contact se base sur l'idée suivante : en partant d'un état de contact respectant la condition de non-interpénétration à un instant donné et en contrôlant, à tous les instants suivants, les vitesses des points qui violent la condition de non-interpénétration alors les déplacements, obtenus par intégration des champs de vitesses, respectent, à tout instant, la condition de non-interpénétration (lemme de viabilité [9]). D'autres auteurs ont établi des formulations en vitesse (cf. e.g. [7]). La suivante, usant des champs de signe en vitesse et en placement, nous semble toutefois présenter des atouts de clarté et de complétude :

Les champs \mathbf{u}^i , \mathbf{v}^i étant supposés connus, à l'instant t_0 , on cherche à résoudre le problème suivant :

trouver $(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i, \lambda_v, S_d, S_v)$ tels que pour tout \mathbf{w}^i et λ^* admissibles et pour $t \geq t_0$,

$$-\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^i} \rho_0^i \dot{\mathbf{v}}^i \cdot \mathbf{w}^i d\Omega_0^i = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^i} \text{Tr}[\bar{\boldsymbol{\Pi}}^i(\mathbf{v}^i)(\nabla_p \mathbf{w}^i)^T] d\Omega_0^i - \int_{\Gamma_c} S_d S_v \bar{g}_n [[w_n]] d\Gamma \quad (7.a)$$

$$\frac{1}{\rho_n} \int_{\Gamma_c} (\lambda_v - S_d S_v \bar{g}_n) \lambda^* d\Gamma = 0 \quad (7.b)$$

$$\mathbf{u}^i(t) = \mathbf{u}^i(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}^i(s) ds, \text{ dans } \Omega_0^i \quad (7.c)$$

$$S_d = \chi(d_n), S_v = \chi(\bar{g}_n), \text{ sur } \Gamma_c \quad (7.d)$$

avec,

$$\bar{g}_n = \lambda_v - \rho_n [[v_n]] \quad (7.e)$$

et avec une relation de comportement ad-hoc. Notons que $\bar{\boldsymbol{\Pi}}^i$ se déduit de $\boldsymbol{\Pi}^i$ en remplaçant \mathbf{u}^i par son expression en fonction de \mathbf{v}^i et que S_v est le champ du signe en vitesse.

Remarque 1 : Les relations de type Signorini (en vitesse) peuvent être remplacées par des relations de type compliances : $\lambda_v(t) = -C_n [[v(t)]]_n^+$. Avec ce choix, la condition de contact persistant est satisfaite à la limite sur C_n .

Remarque 2 : L'intégration numérique de (7.c) peut être faite à l'aide d'un θ -schéma [7].

4.3 Formulation en vitesse-déplacement

Pour les problèmes où les contacts sont très localisés, cas de notre problème industriel, l'écriture en vitesse peut être enrichie en utilisant un schéma en temps d'ordre élevé en dehors des zones de contacts, et ce afin de limiter la dispersion des schémas numériques.

Pour ce faire, on propose d'écrire une formulation en vitesse sur les zones d'impact et en déplacement pour le reste du domaine. Les deux modèles sont ici raccordés, en volume, par la méthode *Arlequin* [2] (cf. Figure 4). Soit :

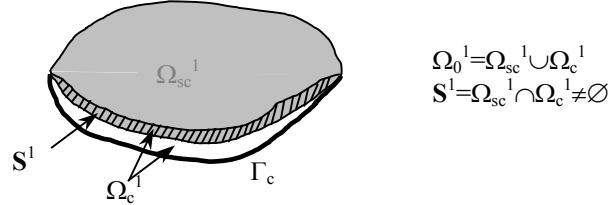


Figure 4- Décomposition des domaines

Trouver \mathbf{u}^i , \mathbf{v}^i , λ_v et Λ^i tels que pour tout \mathbf{w}^i , \mathbf{v}^{*i} , λ_v^* et Λ^{*i} :

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^2 \left[\int_{\Omega_{sc}^i} \alpha_{sc}^i \rho_0^i \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w}^i d\Omega + \int_{\Omega_c^i} \alpha_c^i \rho_0^i \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}^{*i} d\Omega \right] + \sum_{i=1}^2 \langle \Lambda, \mathbf{v}^{*i} - \mathbf{w}^i \rangle_{S^i,1} = \\
 & \sum_{i=1}^2 \left[\int_{\Omega_{sc}^i} \delta_{sc}^i Tr[\mathbf{\Pi}^i(\mathbf{u}^i)(\nabla_p \mathbf{w}^i)^T] d\Omega + \int_{\Omega_c^i} \delta_c^i Tr[\bar{\mathbf{\Pi}}^i(\mathbf{v}^i)(\nabla_p \mathbf{v}^{*i})^T] d\Omega \right] - \\
 & \int_{\Gamma_c} S_d S_v \bar{g}_n [[v_n^*]] d\Gamma \\
 & \frac{1}{\rho_n} \int_{\Gamma_c} (\lambda_v - S_d S_v \bar{g}_n) \lambda^* d\Gamma = 0 \\
 & \sum_{i=1}^2 \langle (\mathbf{v}^i - \dot{\mathbf{u}}^i), \Lambda^{*i} \rangle_{S^i,1} = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

où α_{sc}^i , α_c^i , δ_{sc}^i et δ_c^i sont des réels $\in]0,1[$, vérifiant :

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{sc}^i + \alpha_c^i = 1 \text{ sur } \mathbf{S}^i, \quad \alpha_{sc}^i = 0 \text{ sur } \Omega_c^i \setminus \mathbf{S}^i \text{ et } \alpha_c^i = 0 \text{ sur } \Omega_{sc}^i \setminus \mathbf{S}^i \\
 & \delta_{sc}^i + \delta_c^i = 1 \text{ sur } \mathbf{S}^i, \quad \delta_{sc}^i = 0 \text{ sur } \Omega_c^i \setminus \mathbf{S}^i \text{ et } \delta_c^i = 0 \text{ sur } \Omega_{sc}^i \setminus \mathbf{S}^i
 \end{aligned} \tag{12}$$

\bar{g}_n , S_d et S_v sont définis par (7.d) et (7.e). $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité permettant d'assurer le raccord des vitesses dans les zones de superposition \mathbf{S}^i .

Cette écriture permet l'utilisation de modèles mécaniques et de schémas numériques différents. C'est l'un de ses atouts majeurs.

5 Semi-discrétisation temporelle : schémas mixtes

Le problème industriel, mentionné en introduction, s'inscrit dans le cadre de la dynamique rapide et transitoire. On y est amené à des résolutions sur des plages de temps

très longues par rapport à la durée des impacts (caractère multi-échelles en temps). Par ailleurs, les dimensions géométriques du système sont très importantes par rapport aux dimensions des zones d'impact (caractère multi-échelles en espace). On propose d'utiliser une technique couplant des méthodes explicites (avec condensation) et implicites en temps et des modèles de structures minces couplés à des modèles solides dans les zones localisées d'impact. La formulation (11) offre la possibilité de faire ces mixages.

6 Attentes numériques

A l'heure où nous rédigeons ce document, l'implémentation numérique des formulations proposées est en cours de réalisation dans *Code_Aster*. Nous espérons pouvoir apporter des résultats numériques éclairant lors de la tenue du colloque.

Références

- [1] Alart P., Curnier A., A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods, *Comp. Meth. Appl. Mec. Eng.*, **92**, 353–375 (1991).
- [2] Ben Dhia H., Problèmes mécaniques multi-échelles : La méthode Arlequin, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **326**, série IIb, 899-904 (1998).
- [3] Ben Dhia H., Vautier I., Zarroug M., Problèmes de contact frottant en grandes transformations: du continu au discret, *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. **9**, n° 1-2-3, 243–261 (2000).
- [4] Ben Dhia H., Modelling and solution by penalty duality method of unilateral contact problems, *Calcul des structures et intelligence artificielle*, **2**, 1-18 (1988).
- [5] Chaudhary A., Bathe K.J., A solution method for static and dynamic analysis of three-Dimensional contact problems with friction, *Comp. & Structures*, **4**, n°6, 855–873 (1986).
- [6] Guilloreau I., Peseux B., Bonini J., Modélisation du contact en implicite. Application à l'interaction rotor/stator, *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. **9**, n° 1-2-3, 331–348 (2000).
- [7] Jean M., The non-smooth contact dynamics method, *Comp. Meth. Appl. Mec. Eng.*, **177**, 235–257 (1999).
- [8] Laursen T.A., Chawla V., Design of energy conserving algorithms for frictionless Dynamic contact problems, *Int. Journal Num. Meth. Engng.*, **40**, 863–886 (1997).
- [9] Moreau J.J., Contact et frottement des systèmes de corps rigides, *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. **9**, n° 1-2-3, 9–28 (2000).