Algorithmes gloutons orthogonaux pour la reconstruction de signaux parcimonieux positifs

Thi Thanh Nguyen, Charles Soussen, Jérôme Idier, El-Hadi Djermoune

Algorithmes gloutons orthogonaux pour la reconstruction de signaux parcimonieux positifs

Thanh T. NGUYEN[1], Charles SOUSSEN[2], Jérôme IDIER[3], El-Hadi DJERMOUNE[1]

[1]CRAN, Université de Lorraine, CNRS, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy

[2]L2S, CentraleSupélec-CNRS-Université Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91192 Gif-sur-Yvette

[3]LS2N, CNRS, Ecole Centrale de Nantes, 44321 Nantes

{thi-thanh.nguyen,el-hadi.djermoune}@univ-lorraine.fr,
charles.soussen@centralesupelec.fr; jerome.idier@ls2n.fr

Résumé – Cette communication concerne la conception, l'implémentation et l'analyse d'algorithmes gloutons pour la reconstruction parcimonieuse sous contrainte de positivité. Ces algorithmes, conçus pour minimiser un critère quadratique sous contraintes de parcimonie et de positivité, généralisent les algorithmes *Orthogonal Matching Pursuit* et *Orthogonal Least Squares* valides dans le cas de la régularisation parcimonieuse seule. Intégrer la contrainte de positivité implique des difficultés pour maintenir une implémentation récursive rapide d'algorithmes mais aussi pour l'analyse théorique de reconstruction exacte d'un support. Nous présentons des contributions originales pour ces deux problèmes.

Abstract – We address sparse approximation under non-negativity constraints, formulated as an ℓ_0 minimization problem. We introduce a family of greedy algorithms, so-called Non-Negative Orthogonal Greedy algorithms generalizing *Orthogonal Matching Pursuit* and *Orthogonal Least Squares* to the non-negative setting. Taking the non-negativity constraint into account yields important challenges both in terms of fast recursive implementation and of K-step exact recovery analysis of a sparse representation. We present novel contributions regarding both issues.

1 Reconstruction de signaux parcimonieux positifs

De nombreux domaines applicatifs conduisent à résoudre des problèmes inverses où le signal ou l'image à reconstruire sont à la fois parcimonieux et positifs. Citons les exemples de la télédétection [1], de l'analyse de signaux audio [2], de la chimiométrie [3] ou de la reconstruction tomographique [4]. La reconstruction d'un signal parcimonieux et positif est naturellement formulée comme un problème de minimisation ℓ_0 sous contrainte de positivité, du type :

$$\min_{\|\boldsymbol{x}\|_0 \leq K} \|\boldsymbol{y} - H\boldsymbol{x}\|^2 \quad \text{s.c.} \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

où $\|\,.\,\|$ et $\|\,.\,\|_0$ représentent respectivement la norme euclidienne et la « norme » ℓ_0, correspondant au nombre d'éléments non-nuls d'un vecteur.

Ce problème est connu pour être NP-difficile [5]. On distingue plusieurs catégories d'approches allant des méthodes de relaxation convexe (*via* les algorithmes proximaux notamment) aux méthodes d'optimisation non-convexe d'un critère continu et non-différentiable approchant [6] ou reformulant [7] le critère (1), et aux méthodes abordant directement l'optimisation du critère ℓ_0 non-modifié *via* une stratégie d'optimisation exacte [8] ou sous-optimale. Les algorithmes gloutons font partie de cette dernière catégorie. Leur principe est de partir d'une solution nulle et de construire progressivement une solution K-parcimonieuse en sélectionnant un à un des atomes du dictionnaire H, avec une mise à jour des amplitudes associées et du résidu d'approximation $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y} - H\boldsymbol{x}$ au fur et à mesure que les nouveaux atomes sont sélectionnés.

Les algorithmes gloutons orthogonaux comme *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP) et *Orthogonal Least Squares* (OLS) mettent à jour les amplitudes par un calcul de projection orthogonale. En notant S le support courant, les amplitudes associées $\boldsymbol{x}(S)$ sont celles pour lesquelles le résidu d'approximation $\boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{y} - H_S\boldsymbol{x}(S)$ est minimum en norme ℓ_2, où H_S est la sous-matrice de H réduite à S. Leur calcul nécessite la résolution d'un problème de moindres carrés non-contraints (ULS pour *Unconstrained Least Squares*). Les implémentations efficaces des algorithmes gloutons reposent sur l'idée que la solution de ce problème de moindres carrés peut être mise à jour rapidement lorsque le support est augmenté d'un élément ($S \leftarrow S \cup \{\ell\}$), modulo la mise à jour d'une factorisation matricielle de type Gram-Schmidt ou de Cholesky [9].

Les algorithmes gloutons généralisés à la reconstruction de signaux positifs possèdent une structure proche des algorithmes gloutons standard, avec à chaque itération, la sélection d'un nouvel atome et la mise à jour des amplitudes en résolvant un problème de moindres carrés sous contrainte de posi-

Ce travail est financé par le projet ANR BECOSE (ANR-15-CE23-0021).

tivité (NNLS pour *Non-Negative Least Squares*) [10]. Cependant, leur implémentation pose une difficulté majeure liée au fait que les problèmes NNLS ne possèdent pas de solution explicite. Dans la littérature, ces algorithmes sont réputés lents et des solutions récursives approchées ont été privilégiées [11]. Dans [12], nous montrons que des implémentations récursives exactes sont possibles sans nécessiter de surcoût calculatoire substantiel. Cette contribution est résumée dans la section 3.

L'analyse théorique des algorithmes vise à caractériser leur capacité à reconstruire le support d'une représentation K-parcimonieuse. Les analyses classiques d'algorithmes gloutons en K-itérations cherchent à prouver que chaque itération sélectionne un atome dans le support du vecteur parcimonieux inconnu [13]. Elles ne s'étendent pas directement aux algorithmes gloutons non-négatifs, car les propriétés géométriques sur lesquelles elles s'appuient (en particulier, l'orthogonalité entre le résidu et l'espace d'approximation) ne sont plus valables. Il est donc nécessaire de repenser ces analyses. Dans [14], nous proposons une analyse basée sur l'hypothèse de cohérence mutuelle faible $\mu < 1/(2K-1)$ pour analyser de façon unifiée différents algorithmes proposés dans la littérature [10, 11]. Les mécanismes sur lesquels cette analyse repose sont synthétisés dans la section 4.

2 Algorithmes gloutons positifs

La structure générale des algorithmes gloutons orthogonaux positifs (NNOG pour *Non-Negative Orthogonal Greedy algorithms*) est résumée dans l'algorithme 1. Une itération de l'algorithme consiste en trois étapes :

1. Sélection d'un nouvel atome $\ell \notin S$ pour enrichir le support S de la représentation parcimonieuse.
2. Mise à jour des amplitudes liées aux atomes sélectionnés ($i \in S$) *via* la résolution du problème NNLS associé au support de $\boldsymbol{x}$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_S^+ = \operatorname*{arg\,min}_{\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}} \|\boldsymbol{y} - H\boldsymbol{x}\|^2 \text{ s.c. } \operatorname{supp}(\boldsymbol{x}) \subset S. \quad (2)$$

3. Compression du support.

La principale différence structurelle avec les algorithmes gloutons orthogonaux est la troisième étape de compression du support. On remarque en effet que les coefficients de la représentation parcimonieuse obtenus après l'étape NNLS s'annulent lorsque les contraintes de positivité du problème (2) sont activées. L'étape de compression que nous avons proposée dans [15, 12] vise à supprimer les indices correspondant aux coefficients annulés, pour faire coïncider S avec le support de la solution courante $\boldsymbol{x}$. La structure de l'algorithme est donc sensiblement différente des algorithmes gloutons classiques, qui possèdent une propriété d'emboîtement entre supports.

L'algorithme 1 est conçu comme un algorithme de descente. Ses deux conditions d'arrêt garantissent que le vecteur obtenu est exactement K-parcimonieux ($\operatorname{Card}[S] = K$) ou qu'aucune décroissance du critère $\|\boldsymbol{y} - H\boldsymbol{x}\|^2$ n'est possible en ajoutant un nouvel atome au support courant. La condition $\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{t}} \boldsymbol{r}_S > 0$ garantit en effet que l'erreur quadratique peut décroître en sélectionnant l'atome i, ce qui nous a conduit à introduire le concept d'« atome descendant » dans [12].

Algorithme 1: Structure générale des algorithmes gloutons orthogonaux pour minimiser (1). $\boldsymbol{h}_i$ désigne la i-ème colonne du dictionnaire H, et $\hat{\boldsymbol{x}}_S^+$ représente la solution NNLS associée au support S.

entrées: $\boldsymbol{y}, H, K$
sorties : $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{0}$; $S \leftarrow \emptyset$; $\boldsymbol{r}_S \leftarrow \boldsymbol{y}$;
tant que $\operatorname{Card}[S] < K$ *et* $\max_{i \notin S} \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{t}} \boldsymbol{r}_S > 0$ **faire**
  Sélectionner un atome $\ell \notin S$;
  $S \leftarrow S \cup \{\ell\}$;
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \hat{\boldsymbol{x}}_S^+$;
  $S \leftarrow \operatorname{supp}(\boldsymbol{x})$;
  $\boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{y} - H\boldsymbol{x}$;
fin

La structure des algorithmes NNOG dans le tableau 1 est commune à différents algorithmes comme *Non-Negative Orthogonal Matching Pursuit* (NNOMP) [10], défini comme une généralisation d'OMP, *Non-Negative Orthogonal Least Squares* (NNOLS) et *Suboptimal Non-Negative Orthogonal Least Squares* (SNNOLS), qui sont deux généralisations d'OLS [16]. Dans leur principe, ces algorithmes diffèrent uniquement par leur règle de sélection du nouvel atome :

$$\ell^{\text{NNOMP}} \in \operatorname*{arg\,max}_{i \notin S} \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{t}} \boldsymbol{r}_S, \quad (3)$$

$$\ell^{\text{SNNOLS}} \in \operatorname*{arg\,max}_{i \notin S} \boldsymbol{b}_i^{\mathrm{t}} \boldsymbol{r}_S, \quad (4)$$

$$\ell^{\text{NNOLS}} \in \operatorname*{arg\,min}_{i \notin S} \|\boldsymbol{r}_{S \cup \{i\}}^+\|^2, \quad (5)$$

où $\boldsymbol{r}_{S \cup \{i\}}^+ := \boldsymbol{y} - H\hat{\boldsymbol{x}}_{S \cup \{i\}}^+$ désigne le « résidu positif » lié à la solution NNLS pour le support $S \cup \{i\}$, et $\boldsymbol{b}_i$ représente le projeté orthogonal normalisé de $\boldsymbol{h}_i$ sur le sous-espace orthogonal aux atomes $\boldsymbol{h}_j$, $j \in S$.

La règle de sélection de NNOMP est une extension directe de celle d'OMP, qui maximise $|\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{t}} \boldsymbol{r}_S|$. De même, NNOLS suit le mécanisme d'OLS, où l'atome sélectionné est celui qui engendre une décroissance maximale du résidu d'approximation. Finalement, SNNOLS est inspiré d'une vision géométrique d'OLS en terme d'angle maximal entre le projeté orthogonal $\boldsymbol{b}_i$ de l'atome candidat et le résidu courant. Si les deux interprétations d'OLS en terme d'optimisation et de géométrie projective sont équivalentes, cette équivalence n'est plus valable dans le cas des algorithmes gloutons positifs, ce qui conduit à deux algorithmes distincts SNNOLS et NNOLS [12].

NNOMP est clairement le moins coûteux des trois algorithmes, car sa règle de sélection ne repose que sur le calcul d'un produit scalaire par atome. Néanmoins, ses limites de performance pour des problèmes mal posés nous ont poussé à nous intéresser aux algorithmes inspirés d'OLS, dont la complexité calculatoire est accrue. La différence de complexité entre NN-

OLS et SNNOLS s'avère délicate à analyser à partir des expressions (4) et (5). Nous avons montré que (4) équivaut à [12] :

$$\ell^{\text{SNNOLS}} \in \arg\min_{i \notin S} \left\{ \min_{\boldsymbol{u}, v \geq 0} \|\boldsymbol{y} - H_S \boldsymbol{u} - \boldsymbol{h}_i v\|^2 \right\}. \qquad (6)$$

Il apparaît alors que le test de sélection d'atome de SNNOLS est largement moins coûteux que celui de NNOLS, car (6) est un problème de moindres carrés non-contraint par rapport à $\boldsymbol{u}$; la contrainte de positivité porte sur variable scalaire v seulement. Par opposition, le calcul de $\boldsymbol{r}^{+}_{S \cup \{i\}}$ dans le cas de NNOLS nécessite de résoudre un problème NNLS avec des contraintes de positivité sur $\boldsymbol{u}$ et v.

3 Implémentation rapide

Dans l'édition précédente du Gretsi [15], nous avons présenté une implémentation rapide de NNOMP basée sur la résolution récursive des sous-problèmes NNLS par l'algorithme des contraintes actives [17] avec un démarrage à chaud correspondant à une initialisation par l'itéré courant de NNOMP. L'algorithme des contraintes actives résout le problème NNLS de façon exacte en un nombre fini d'itérations. Comme il possède une structure gloutonne, les implémentations qui résultent de son couplage avec les algorithmes NNOG sont pleinement récursives. Nous avons constaté empiriquement que l'algorithme des contraintes actives avec démarrage à chaud converge en un très faible nombre d'itérations.

Dans [12], nous avons proposé une série d'améliorations supplémentaires visant à résoudre les problèmes de sélection d'atomes (3)-(5) de manière rapide. Il s'agit *(i)* de prédétecter que certains atomes candidats ne sont pas descendants et donc les écarter ; *(ii)* pour les atomes restants et dans le cas de NNOLS (qui requiert la résolution répétée de problèmes NNLS), un précalcul des solutions du problème ULS pour le support candidat $S \cup \{i\}$ permet de détecter des atomes non-optimaux au sens de (5), ce qui nous évite des appels à NNLS.

À titre d'exemple, les tests effectués dans [12] pour un problème de déconvolution impulsionnelle de taille $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{1140}$ avec un filtre passe-bas montrent que pour un support S de taille 80, il y a 30 % d'atomes candidats ($i \notin S$) non testés, 68 % d'atomes candidats pour lesquels seule la solution ULS associée à $S \cup \{i\}$ est calculée, et seulement 2% des atomes candidats pour lequel un appel à NNLS est requis.

4 Analyse d'algorithmes gloutons orthogonaux positifs

L'analyse théorique des algorithmes NNOG en termes de reconstruction exacte du support d'une représentation parcimonieuse $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ (avec $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$) est un problème ouvert. En effet, à notre connaissance, il n'existe pas d'analyse mathématique des algorithmes NNOMP, NNOLS et SNNOLS. Néanmoins, Bruckstein *et al.* [10] ont conjecturé que NNOMP présente des garanties de reconstruction exacte en K itérations si la cohérence mutuelle du dictionnaire $\mu = \max_{i \neq j} |\langle \boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{h}_j \rangle|$ vérifie :

$$\mu < \frac{1}{2K-1}. \qquad (7)$$

Dans [14], nous avons prouvé cette conjecture non seulement pour NNOMP mais aussi pour NNOLS et SNNOLS. Notre technique de preuve s'appuie sur une analyse de préservation de signe par les algorithmes OMP et OLS. Nous avons d'abord établi le résultat suivant.

Théorème 1. *[14, Cor. III.1] Supposons que $\mu < \frac{1}{2K-1}$. Soit $\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{x}$ une représentation K-parcimonieuse avec $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$. Alors OMP et OLS reconstruisent correctement le support de $\boldsymbol{x}$ en K itérations. De plus, pour chaque itération $k = 1, \ldots, K$, les poids des k atomes sélectionnés sont positifs.*

La première partie de ce résultat est bien connue. En effet, (7) est une condition nécessaire [18] et suffisante [13, 19] de reconstruction exacte quelles que soient les amplitudes non nulles des poids dans $\boldsymbol{x}$. La deuxième partie du théorème indique qu'en régime de reconstruction exacte, l'itéré courant d'OMP/OLS a des coordonnées positives. Comme cet itéré correspond à la solution du problème des moindres carrés (ULS) associé au support courant S, la solution NNLS correspondant au même support coïncide avec la solution ULS. La très grande proximité entre les règles de sélection d'atomes d'OMP et de NNOMP (3) nous permet de conclure que les itérés de NNOMP et OMP coïncident. De façon parallèle, ceux de NNOLS, SNNOLS et OLS coïncident, d'où le résultat suivant.

Théorème 2. *[14, Cor. III.2] Supposons que $\mu < \frac{1}{2K-1}$. Soit $\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{x}$ une représentation K-parcimonieuse avec $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$. Alors les itérés de NNOMP coïncident avec ceux de OMP. De plus, les itérés de NNOLS et SNNOLS coïncident avec ceux de OLS. Par conséquent, NNOMP, SNNOLS et NNOLS reconstruisent tous le support de $\boldsymbol{x}$ en K itérations.*

Notons enfin que NNLS étant des problèmes d'optimisation contraints, certaines contraintes de positivité sont susceptibles d'être activées à chaque itération des algorithmes NNOG, entraînant l'annulation des poids correspondants dans la représentation parcimonieuse. Dans ce cas, l'algorithme NNOG doit effectuer un nombre d'itérations supérieur à K pour pouvoir reconstruire une représentation réellement K-parcimonieuse. Le théorème 2 indique que le phénomène d'annulation des poids ne se produit pas en régime de reconstruction exacte.

5 Conclusions

Nous avons présenté un panorama unifié des algorithmes gloutons orthogonaux non-négatifs (NNOG), conçus comme des algorithmes de descente pour le problème de minimisation ℓ_0 (1), ainsi qu'une analyse de leur propriété de reconstruction exacte d'un vecteur K-parcimonieux positif sous l'hypothèse de cohérence mutuelle inférieure à $\frac{1}{2K-1}$.

Du point de vue pratique, nous avons développé un logiciel Matlab en accès libre qui intègre les implémentations récursives proposées en Section 3 [20]. Nous avons effectué des simulations numériques extensives [12] visant à comparer les algorithmes NNOMP, SNNOLS et NNOLS pour des problèmes difficiles de type déconvolution impulsionnelle avec un filtre passe-bas, pour lesquels la cohérence mutuelle est proche de 1. Il ressort d'abord de ces tests que bien que les algorithmes non-négatifs sont plus coûteux que les versions standards OMP et OLS, le surcoût n'est pas rédhibitoire grâce aux implémentations rapides proposées (le ratio en temps de calcul entre les versions standards et non-négatives n'excède jamais un facteur 5 pour des problèmes de taille 1200 avec $K = 80$). NNOMP s'avère plus rapide mais nettement moins précis que SNNOLS et NNOLS pour reconstruire le vecteur parcimonieux. La précision est évaluée en termes d'erreur quadratique sur $\boldsymbol{x}$ et de nombre de vrais positifs dans le support trouvé. Ces deux algorithmes fournissent des reconstructions parcimonieuses de qualité comparable, SNNOLS étant sensiblement plus rapide. Plus précisément, on peut noter que le nombre d'itérations de NNOLS pour atteindre un support de taille K est sensiblement plus faible que celui de SNNOLS (en moyenne 120 itérations contre 150 sont nécessaires pour obtenir un support de taille $K = 80$ pour l'exemple donné dans [20]) mais le coût par itération de NNOLS reste plus important. En revanche, les défauts de SNNOLS semblent être plus prononcés pour des problèmes de type « super-résolution » en utilisant des grilles fines (impliquant des dictionnaires plus gros et plus corrélés), où le nombre d'itérations de SNNOLS augmente significativement, induisant un coût calculatoire qui devient globalement supérieur à celui de NNOLS.

Références

[1] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias et A. Plaza, « Sparse unmixing of hyperspectral data », *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 49, no. 6, pp. 2014–2039, juin 2011.

[2] T. Virtanen, J. F. Gemmeke et B. Raj, « Active-set Newton algorithm for overcomplete non-negative representations of audio », *IEEE Trans. Audio, Speech, Language Process.*, vol. 21, no. 11, pp. 2277–2289, nov. 2013.

[3] R. Bro et S. De Jond, « A fast non-negativity-constrained least squares algorithm », *J. Chemometrics*, vol. 11, no. 5, pp. 393–401, 1997.

[4] S. Petra et C. Schnörr, « Average case recovery analysis of tomographic compressive sensing », *Linear Alg. Appl.*, vol. 441, pp. 168–198, 2014.

[5] B. K. Natarajan, « Sparse approximate solutions to linear systems », *SIAM J. Comput.*, vol. 24, no. 2, pp. 227–234, avr. 1995.

[6] G. Gasso, A. Rakotomamonjy et S. Canu, « Recovering sparse signals with a certain family of nonconvex penalties and DC programming », *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 12, pp. 4686–4698, déc. 2009.

[7] E. Soubies, L. Blanc-Féraud et G. Aubert, « A continuous exact ℓ_0 penalty (CEL0) for least squares regularized problem », *SIAM J. Imaging Sci.*, vol. 8, no. 3, pp. 1607–1639, 2015.

[8] S. Bourguignon, J. Ninin, H. Carfantan et M. Mongeau, « Exact sparse approximation problems via mixed-integer programming : Formulations and computational performance », *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 64, no. 6, pp. 1405–1419, mars 2016.

[9] B. L. Sturm et M. G. Christensen, « Comparison of orthogonal matching pursuit implementations », in *Proc. Eur. Sig. Proc. Conf.*, Bucarest, Roumanie, août 2012, pp. 220–224.

[10] A. M. Bruckstein, M. Elad et M. Zibulevsky, « On the uniqueness of nonnegative sparse solutions to underdetermined systems of equation », *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 54, no. 11, pp. 4813–4820, nov. 2008.

[11] M. Yaghoobi, D. Wu et M. E. Davies, « Fast non-negative orthogonal matching pursuit », *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 9, pp. 1229–1233, sep. 2015.

[12] T. T. Nguyen, J. Idier, C. Soussen et E.-H. Djermoune, « Non-negative orthogonal greedy algorithms », rapport de recherche, `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02049424`, fév. 2019

[13] J. A. Tropp, « Greed is good : Algorithmic results for sparse approximation », *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 50, no. 10, pp. 2231–2242, oct. 2004.

[14] T. T. Nguyen, C. Soussen, J. Idier et E.-H. Djermoune, « Sign preservation analysis of orthogonal greedy algorithms », rapport de recherche, `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01971697`, jan. 2019.

[15] T. T. Nguyen, C. Soussen, J. Idier et E.-H. Djermoune, « An optimized version of non-negative OMP », in *Actes 26e coll. GRETSI*, Juan-les-Pins, sep. 2017.

[16] M. Yaghoobi et M. E. Davies, « Fast non-negative orthogonal least squares », in *Actes de la 23e conf. EUSIPCO*, Nice, août 2015, pp. 479–483.

[17] C. L. Lawson et R. J. Hanson, *Solving least squares problems*, pp. 149–199, Prentice-Hall, Saddle River, Nj, USA, SIAM edition, 1974.

[18] T. T. Cai, L. Wang et G. Xu, « Stable recovery of sparse signals using an oracle inequality », *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 56, no. 7, pp. 3516–3522, juil. 2010.

[19] C. Herzet, C. Soussen, J. Idier et R. Gribonval, « Exact recovery conditions for sparse representations with partial support information », *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 59, no. 11, pp. 7509–7524, nov. 2013.

[20] T. T. Nguyen, C. Soussen, J. Idier et E.-H. Djermoune, « Non-negative greedy algorithms : Matlab implementation », *CodeOcean*, `doi.org/10.24433/CO.2445681.v1`, mars 2019.